

第十二章 平稳过程

粗略的说，平稳过程是指的其统计特性不随时间的推移而改变的过程

平稳过程主要有严平稳过程和宽平稳过程

第一节 平稳过程的概念

1. 严平稳过程

定义1 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为随机过程, 若对任意 n 个时刻

$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 及任意 τ , $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$,

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \stackrel{d}{=} (X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$$

则称 $X(t)$ 为严平稳过程

注: 严平稳过程的任何有限维分布对时间的推移是保持不变的

2. 严平稳过程的特点

1) 严平稳过程 $X(t)$ 的一维分布与 t 无关

二维分布仅与时间差有关，而与时间起点无关

2) 若严平稳过程存在二阶矩，则

(1) 均值函数为常数： $m(t)=E[X(t)]=c$ ， c 为常数

(2) 相关函数仅是时间差的函数：

$$R(t, t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=E[X(0)X(\tau)]$$

3、宽平稳过程

定义2 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为二阶矩过程，若它满足条件

(1) $E[X(t)] = m$, m 为常数

(2) 对任意的 $t \in T$, $\tau \in T$, $E[X(t)X(t + \tau)]$ 不依赖于 t

则称 $X(t)$ 为宽平稳过程，简称平稳过程

当 T 为整数集，则称 $X(t)$ 为宽平稳时间序列

对平稳过程，用 $R_X(\tau)$ 表示 $X(t)$ 的相关函数

注1 严平稳过程不一定是宽平稳过程

因为严平稳过程不一定是二阶矩过程
若严平稳过程存在二阶矩，则它一定是宽平稳过程

注2 宽平稳过程也不一定是严平稳过程

因为宽平稳过程只保证一阶矩和二阶矩不随时间推移而改变，这当然不能保证其有穷维分布不随时间而推移

注3 若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为Gauss过程，则 $X(t)$ 为严平稳过程的充要条件是 $X(t)$ 是宽平稳过程

注4 利用均值函数与协方差函数（相关函数）也可讨论随机过程的平稳性

协方差函数

$$\begin{aligned}C(t + \tau, t) &= \text{Cov}[X(t + \tau), X(t)] \\&= E[X(t + \tau)X(t)] - E[X(t)]E[X(t + \tau)] \\&= R_X(\tau) - m^2\end{aligned}$$

即表示协方差函数仅依赖于时间间隔 τ ，而与 t 无关

例1 设 $\{X(n), n = 0, \pm 1, \pm 2\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列,

且均值和方差为 $E[X(n)] = 0$, $D[X(n)] = \sigma^2$

试讨论随机变量序列 $X(n)$ 的平稳性

解: 因为 $E[X(n)] = 0$

$$R_X(\tau) = E[X(n+\tau)X(n)] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{当 } \tau = 0 \\ 0, & \text{当 } \tau \neq 0 \end{cases}$$

故 $X(n)$ 是平稳过程

注

在科学和工程中, 例1中的过程称为纯随机序列或“**白噪声**”(white noise). 若 $X(t) \sim N(0, \tau)$, 则称其为正态白噪声

例2 设随机序列 $\{X(t) = \sin 2\pi t \eta, t \in T\}$,

其中 $T = \{1, 2, \dots\}$ η 在 $[0, 1]$ 上服从均匀分布,

试讨论随机序列 $X(t)$ 的平稳性

解: η 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$\text{所以 } E[X(t)] = \int_0^1 \sin 2\pi t x dx = 0$$

$$R_X(\tau) = \int_0^1 \sin 2\pi(t + \tau)x \sin 2\pi x dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{当 } \tau = 0 \\ 0, & \text{当 } \tau \neq 0 \end{cases}$$

故 $X(t)$ 是平稳随机序列

注 例2中的过程是宽平稳的, 但不是严平稳的

例3 设 $\{X(t), T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是白噪声序列,

$$\text{令 } Y(t) = \sum_{k=0}^N a_k X(t-k), \text{ 其中 } N \text{ 为自然数,}$$

$a_0, a_1, \dots, a_N$ 为常数

试证明 $Y(t)$ 是平稳序列

证:

$$E[Y(t)] = \sum_{k=0}^N a_k E[X(t-k)] = 0$$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N a_k a_j E[X(t-k)X(t+\tau-j)]$$

$$= \begin{cases} 0 & |\tau| > N \\ \sum_{k=0}^{N-|\tau|} a_k a_{k+\tau} \sigma^2 & |\tau| \leq N \end{cases}$$

故 $Y(t)$ 是平稳过程. 通常称 $Y(t)$ 是白噪声序列的滑动和

例4 令 $\{Y(t) = (-1)^{\mu_t} X, t \in [0, +\infty)\}$, 其中

(1) X 为随机变量, 且 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;

(2) $\{\mu_t, t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程;

(3) X 与 $\{\mu_t, t \geq 0\}$ 相互独立

证明 $\{Y(t) = (-1)^{\mu_t} X, t \in [0, +\infty)\}$ 是平稳过程

解: $E[Y(t)] = E[(-1)^{\mu_t} X] = E[(-1)^{\mu_t}]E[X] = 0$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[(-1)^{\mu_t} X (-1)^{\mu_{t+\tau}} X] = E[(-1)^{\mu_t + \mu_{t+\tau}} X^2]$$

$$= E[(-1)^{\mu_t + \mu_{t+\tau}}]E[X^2] = E[(-1)^{\mu_t + \mu_{t+\tau}}] = E[(-1)^{\mu_{t+\tau} - \mu_t}]$$

当 $\tau > 0$ 时, $\mu_{t+\tau} - \mu_t \sim P(\lambda\tau)$,

$$E[(-1)^{\mu_{t+\tau} - \mu_t}] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = e^{-2\lambda\tau}$$

当 $\tau < 0$ 时, $\mu_{t+\tau} - \mu_t \sim P(-\lambda\tau)$, $E[(-1)^{\mu_t + \mu_{t+\tau}}] = e^{2\lambda\tau}$

故 $Y(t)$ 是平稳过程

第二节 相关函数的性质

一、自相关函数的性质

设 $X_T = \{X(t), t \in T\}$ 为平稳过程, X_T 的自相关函数为,

$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$, 则 $R_X(\tau)$ 具有以下性质:

- (1) $R_X(0) \geq 0$;
- (2) $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$;
- (3) $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$;
- (4) $R_X(\tau)$ 是非负定的, 即对 $\forall n \in N, \forall n$ 个实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 和复数 $z_1, z_2, \dots, z_n$, 都有

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n R_X(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0$$

上述四条性质中，**非负性**是平稳过程自相关函数的本质特性. 可以证明任一（在 $t=0$ 处连续且 $f(0) \neq 0$ 的）函数 $f(t)$ 若是非负定的，则它必是某平稳过程的自相关函数

二、自协方差函数的性质

设 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳过程, X_T 的自协方差函数为,

$C_X(\tau) = \text{Cov}(X(t), X(t+\tau))$, 则 $C_X(\tau)$ 具有以下性质:

(1) $C_X(0) \geq 0$;

(2) $|C_X(\tau)| \leq C_X(0)$;

(3) $C_X(-\tau) = C_X(\tau)$;

(4) $C_X(\tau)$ 是非负定的, 即对 $\forall n \in N, \forall n$ 个实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 和复数 $z_1, z_2, \dots, z_n$, 都有

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n C_X(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0$$

三、互相关函数的性质

设 $X_T = \{X(t), t \in T\}$ 与 $Y_T = \{Y(t), t \in T\}$ 为两个平稳过程，若 $E(X(t)Y(t+\tau))$ 不依赖于 t ，则称 X_T 与 Y_T 是平稳相关的。它们的互相关函数为 $R_{XY}(\tau) = E(X(t)Y(t+\tau))$ ，性质如下：

$$(1) R_{XY}(-\tau) = R_{XY}(\tau);$$

$$(2) |R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_X(0)} \sqrt{R_Y(0)}.$$

X_T 与 Y_T 的互协方差函数为

$$\begin{aligned} C_{XY}(\tau) &= \text{Cov}(X(t), Y(t+\tau)) = E(X(t)Y(t+\tau)) - m_X(t)m_Y(t+\tau) \\ &= R_{XY}(\tau) - m_X m_Y \end{aligned}$$

即 X_T 与 Y_T 的互协方差函数也不依赖于 t 。

第三节 平稳过程的谱密度

一、相关函数的谱分解

定理1 (1) 设 $X(t)$ 是均方连续的平稳过程，则它的自相关函数 $R_X(\tau)$ 可以表示为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} d\tilde{F}(\omega), -\infty < \tau < +\infty \quad (12.1)$$

其中 $\tilde{F}(\omega)$ 是定义在 R 上的单调非降、右连续的有界函数

(2) 平稳随机序列 $\{X(n), 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的相关函数 $R_X(m)$ ，则

$$R_X(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega} d\tilde{F}_1(\omega), m = 0, \pm 1, \dots \quad (12.2)$$

其中 $\tilde{F}_1(\omega)$ 是定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调非降、右连续的有界函数

(12.1) 和 (12.2) 式分别称为 $R_X(\tau)$ 和 $R_X(m)$ 的谱分解式

而 $\tilde{F}(\omega)$ 和 $\tilde{F}_1(\omega)$ 称为平稳过程的谱函数

若 $\tilde{F}(\omega)$ 绝对连续, 则存在 $S_X(\omega)$ 使得,

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_X(\omega) d\omega + C, \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

$$\tilde{F}'(\omega) = S_X(\omega)$$

$\tilde{F}(\omega)$ 称为谱函数, $S_X(\omega)$ 称为谱密度



相当于分布函数和密度函数

若 $R_X(\tau)$ 绝对可积, $R_X(\tau)$ 可以表示为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\omega} S_X(\omega) d\omega, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

其中

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\omega} R_X(\tau) d\tau$$

相关函数 $R_X(\tau)$ 与谱密度 $S_X(\omega)$ 构成了Fourier变换对,
即

$$S_X(\omega) = F[R_X(\tau)]; R_X(\tau) = F^{-1}[S_X(\omega)]$$

对于平稳序列 $X_T = \{X(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 的相关函数 $R_X(m)$, 若它满足 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |R_X(m)| < \infty$, 则必存在谱密度 $S_X(\omega)$ 使得

$$R_X(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega} S_X(\omega) d\omega, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中

$$S_X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-im\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

二、谱密度的物理意义

1. 确定性信号 $x(t)$ 的功率谱密度

设**非随机信号** $x(t)$ 是时间 t 的非周期实函数，且 $x(t)$ 满足

- $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 范围内满足Dirichlet条件

- $x(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

连续或至多有有限个第一类间断点

有限个极值点

则 $x(t)$ 的傅立叶变换存在，即可求得 $x(t)$ 的频谱函数

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F_X(\omega) d\omega$$

$x(t)$ 称为 $F_X(\omega)$ 的反变换，即

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$F_X(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的频谱密度函数

$|F_X(\omega)|$ 称为 $x(t)$ 振幅频谱

• 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ ，则有帕塞瓦尔（Parseval）等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt$$

x(t)的总能量 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\omega) \overline{F_X(\omega)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(\omega)|^2 d\omega$$

x(t)的能量谱密度

帕塞瓦尔等式又可理解为总能量的**谱表示式**

在实际应用中，可能存在 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

此时 $x(t)$ 的傅立叶变换不存在。我们研究 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的平均功率，即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

接下来，我们研究平均功率的谱表示式

平均功率的谱表示式

由给定的 $x(t)$ 构造一个截尾函数

绝对可积

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T, \\ 0 & |t| > T. \end{cases}$$

$x_T(t)$ 的傅立叶变换为

$$F_X(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt$$

它的帕塞瓦尔等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega$$

变形得

$$\int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega.$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}$$



$x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的平均功率

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega.$$



称为 $x(t)$ 的功率谱密度

3. 平稳随机信号 $X(t)$ 的功率谱密度

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega$$

对上式两端取平均

$$E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \right] = E \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega \right]$$

当 $T \rightarrow \infty$, 取极限, 交换数学期望和积分的次序, 可得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right] d\omega$$

$$\text{令 } S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right]$$

称 $S(\omega)$ 为 $X(t)$ 的**功率谱密度**

将 $\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \right\}$ 定义为平稳过程

$X(t)$ 的平均功率.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right] d\omega$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

$$= R_X(0)$$

$$\text{故 } R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

$R_X(0)$ 表示平稳随机信号的平均功率

3. 功率谱密度和谱密度的关系

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right]$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_X(\omega, T)|^2]}{2T}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[F_X(\omega, T) F_X(-\omega, T)]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t_1) e^{i\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T X(t_2) e^{-i\omega t_2} dt_2 \right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1) X(t_2)] e^{-i\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_2 - t_1) e^{-i\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2$$

则

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \iint_H \frac{1}{2} R_X(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau_2|) R_X(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{令 } R_X^T(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau), & |\tau| < 2T \\ 0, & |\tau| > 2T \end{cases} \quad \text{则 } \lim_{T \rightarrow \infty} R_X^T(\tau) = R_X(\tau)$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X^T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} R_X^T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_X(\omega) \end{aligned}$$

即**功率谱密度**就是**谱密度**；也称自谱密度

三、平稳随机过程谱密度的性质

1. 谱密度为非负的, 即 $S_X(\omega) \geq 0$

证明:
$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|F_X(\omega, T)|^2]}{2T}$$

$$\because |F_X(\omega, T)|^2 \geq 0$$

$$\therefore S_X(\omega) \geq 0$$

2、谱密度是实的偶函数，即 $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$

$$\begin{aligned}\text{证明: } S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \sin \omega\tau d\tau \\ &= 2 \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau\end{aligned}$$

即谱密度为实的偶函数

说明:

1. 平稳过程在自相关函数绝对可积的条件下,
维纳-辛钦公式成立

2. 谱密度和相关函数都是实的偶函数

所以**博赫纳-辛钦公式**还可以写成如下的形式

$$S_X(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

3. 博赫纳-辛钦公式又称为平稳过程自相关函数的谱表示式. 它揭示了从时间角度描述平稳过程 $X(t)$ 的统计规律和从频率角度描述 $X(t)$ 的统计规律之间的联系

在应用上我们可以根据实际情形选择时间域方法或等价的频率域方法去解决实际问题

2. 互谱密度及其性质

若平稳过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 是平稳相关的，当互相关函数满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{XY}(\tau)| d\tau < \infty$ 则 $R_{XY}(\tau)$ 的傅立叶变换存在

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

它们的互谱密度与其互相关函数互为傅立叶变换.

互谱密度是从频率的角度刻画两个平稳过程的平稳相关性

互谱密度的性质

性质1: $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = \overline{S_{YX}(\omega)}$

证明:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{令 } \tau = -\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= \overline{S_{YX}(\omega)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau) e^{-i(-\omega)\tau} d\tau = S_{YX}(-\omega) \end{aligned}$$

互谱密度不再是 ω 的实的、正的偶函数。

性质2: $\text{Re}[S_{XY}(\omega)] = \text{Re}[S_{XY}(-\omega)]$

$$\text{Re}[S_{YX}(\omega)] = \text{Re}[S_{YX}(-\omega)]$$

证明:
$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) [\cos \omega\tau + i \sin(-\omega\tau)] d\tau$$

$$\begin{aligned}\text{Re}[S_{XY}(\omega)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(-\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (\text{令 } \tau = -\tau) \\ &= \text{Re}[S_{XY}(-\omega)]\end{aligned}$$

同理可证

$$\text{Re}[S_{YX}(\omega)] = \text{Re}[S_{YX}(-\omega)]$$

性质3: $\text{Im}[S_{XY}(\omega)] = -\text{Im}[S_{XY}(-\omega)]$

$$\text{Im}[S_{YX}(\omega)] = -\text{Im}[S_{YX}(-\omega)]$$

证明：类似性质2证明

性质4: 互谱密度与自谱密度有不等式关系

$$|S_{XY}(\omega)| \leq \sqrt{S_X(\omega)} \sqrt{S_Y(\omega)}$$

证明：

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \{ F_X(-\omega, T) F_Y(\omega, T) \}$$

$$|S_{XY}(\omega)| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |E \{ F_X(-\omega, T) F_Y(\omega, T) \}|$$

$$\begin{aligned}
 |S_{XY}(\omega)| &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sqrt{\left\{ E |F_X(-\omega, T)|^2 \right\}} \sqrt{\left\{ E |F_Y(\omega, T)|^2 \right\}} \\
 &= \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ E |F_X(-\omega, T)|^2 \right\}} \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ E |F_Y(\omega, T)|^2 \right\}} \\
 &\leq \sqrt{S_X(\omega)} \sqrt{S_Y(\omega)}
 \end{aligned}$$

证毕

四、相关函数与谱密度之间的变换

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

例1: 平稳随机过程的自相关函数为 $R_X(\tau) = Ae^{-\beta|\tau|}$,
 $A>0, \beta>0$, 求过程的功率谱密度

解:

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 Ae^{\beta\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} Ae^{-\beta\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= A \frac{e^{(\beta-i\omega)\tau}}{\beta-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - A \frac{e^{-(\beta+i\omega)\tau}}{(\beta+i\omega)} \Big|_0^{\infty} \\ &= A \left[\frac{1}{\beta-i\omega} + \frac{1}{\beta+i\omega} \right] \\ &= \frac{2A\beta}{\beta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

例2: 设 $X(t)$ 为随机相位随机过程

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

其中 A 、 ω_0 是常数, Φ 为随机相位, 在 $(0, 2\pi)$ 服从均匀分布. 求 $X(t)$ 的功率谱密度

解:

$$R_X(\tau) = E[(X(t)X(t+\tau))]$$

$$= A^2 E[\cos(\omega_0 t + \Phi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Phi)]$$

$$= A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega_0 t + x) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + x) dx$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau = \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos(\omega\tau)| d\tau$$

上述积分不是有限值，即不可积，
因此 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换不存在，
需要引入 δ 函数

上面所说的 δ 函数是单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的简称，
它是一种广义函数，由物理学家狄拉克（Dirac）引入

δ 函数定义如下：

$$(1) \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1,$$

则称 $\delta(x - x_0)$ 是在 $x = x_0$ 的 δ 函数

δ 函数的基本性质是

对任一无穷次可微函数 $f(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) d\tau = f(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) d\tau = f(0)$$

据此可以写出以下傅立叶变换对:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega\tau} \Big|_{\tau=0} = 1$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau)$$

当 $R_X(\tau) = 1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{谱密度 } S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

当 $R_X(\tau) = \delta(\tau)$ 时,

$$\text{谱密度 } S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = 1$$

例3: 设平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为 $S_X(\omega) = \sigma^2$,
求 $X(t)$ 的相关函数 $R_X(\tau)$

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_X(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\sigma^2] = \sigma^2\delta(\tau)$$

白噪声：均值为零而谱密度为正常数的平稳过程 $X(t)$ 称为白噪声过程，
即 $S_X(\omega) = G_0, -\infty < \omega < +\infty, (G_0 > 0)$
简称白噪声，其出自白光具有均匀光谱的缘故

白噪声的自相关函数为：

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = G_0 \delta(\tau)$$

即这个过程在 $t_1 \neq t_2$ 时， $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的

限带白噪声：谱密度仅在某些有限频率范围内取异于零的正常数

低通白噪声就是其中之一，其谱密度为 $S_X(\omega) = \begin{cases} G_0, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$,

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{G_0}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} (\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau) d\omega$$

$$= \frac{G_0}{\pi} \int_0^{\omega_1} \cos \omega\tau d\omega$$

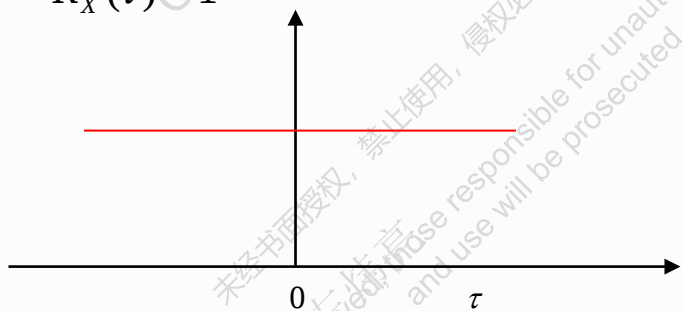
$$= \begin{cases} \frac{G_0\omega_1}{\pi} & \tau = 0 \\ \frac{G_0\omega_1}{\pi} \left(\frac{\sin \omega_1\tau}{\omega_1\tau} \right) & \tau \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{当 } \tau = \frac{k\pi}{\omega_1}, k = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ 时, } R_X(\tau) = 0 \\ \text{即当 } t_2 - t_1 = \frac{k\pi}{\omega_1} \text{ 时, } X(t_1) \text{ 与 } X(t_2) \text{ 不相关} \end{array}$$

例2续:

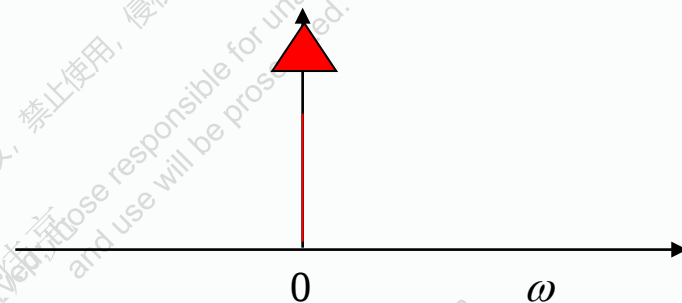
$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{2} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\cos(\omega_0\tau) = \frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{2}) \\
 &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{-i(\omega_0 + \omega)\tau} d\tau \\
 &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &\Rightarrow R_X(\tau) = \cos(\omega_0\tau) \\
 &\Rightarrow S_X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$

两特殊信号的相关函数和谱密度图像

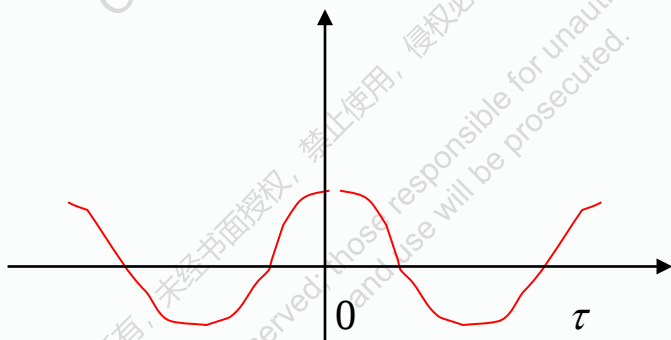
$$R_X(\tau) = 1$$



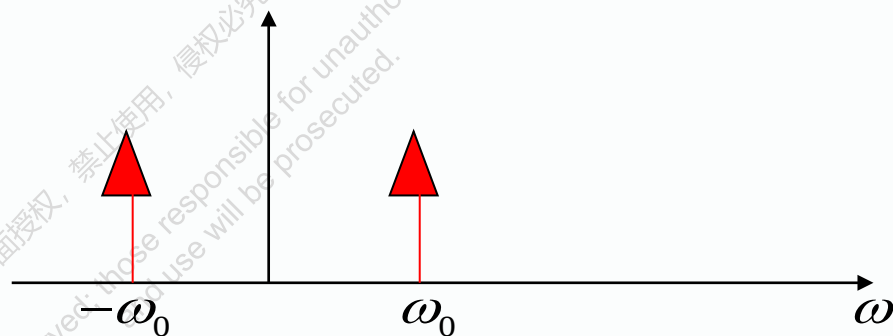
$$S_X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



$$R_X(\tau) = \cos \omega_0 \tau$$



$$S_X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



自相关函数与谱密度对应表

	$R_X(\tau)$	$S_X(\omega)$
1	$e^{-a \tau }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
2	$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{ \tau }{T} & \tau \leq T \\ 0 & \tau > T \end{cases}$	$\frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$
3	$e^{-a \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}$
4	$\frac{\sin \omega_0 \tau}{\pi \tau}$	$S_X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \omega > \omega_0 \end{cases}$
5	1	$2\pi \delta(\omega)$
6	$\delta(\tau)$	1
7	$\cos \omega_0 \tau$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

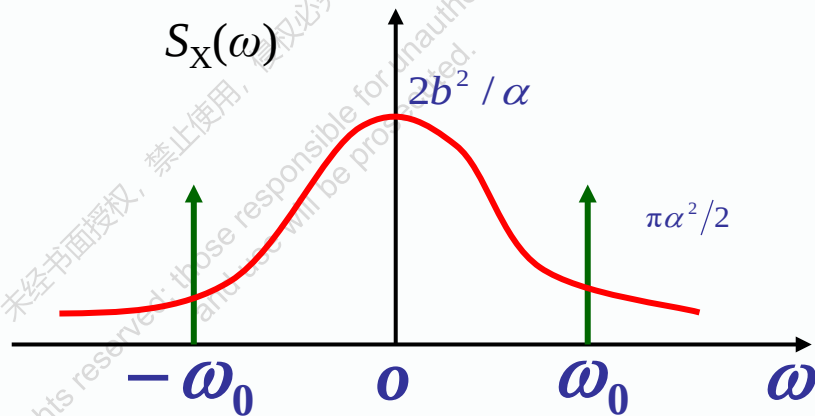
例4: 求自相关函数 $R_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau + b^2 e^{-\alpha|\tau|}$

所对应的谱密度为 $S_X(\omega)$

解: 所要求的谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\pi}{2} a^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{2\alpha b^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

谱密度图像如图所示:



例5: 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

求 $X(t)$ 的谱密度 $S_X(\omega)$.

解:

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} \left(\frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{2} \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{2a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] \\ &= a \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \end{aligned}$$

例6: 已知谱密度 $S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$,

求平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数和均方值

解:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

利用留数定理

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \left[\frac{z^2 + 4}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i)} e^{iz\tau} \right]$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \left[\frac{z^2 + 4}{z^4 + 10z^2 + 9} e^{iz\tau} \right]$$

$$= \frac{1}{48} (9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|})$$

均方值为 $R_X(0) = \frac{7}{24}$.

说明 $S_X(\omega) = S_0 \frac{\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + a_0}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + b_0}$, 其中 $S_0 > 0, m > n$, 分母无实根

称为有理谱密度

例7: 已知谱密度 $S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$,

求平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数和均方值

解:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{3}{8} \frac{1}{(\omega^2 + 1)} + \frac{5}{8} \frac{1}{(\omega^2 + 9)} \right] e^{i\omega\tau} d\omega.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{3}{16} \frac{2}{(\omega^2 + 1)} + \frac{5}{48} \frac{2 \times 3}{(\omega^2 + 3^2)} \right] e^{i\omega\tau} d\omega.$$

$$= \frac{1}{48} (9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|})$$

例8: 设平稳过程 $X(t), Y(t)$ 是平稳相关的, 它们的自谱密度和互谱密度分别为 $S_X(\omega), S_Y(\omega), S_{XY}(\omega)$
证: $Z(t) = X(t) + Y(t)$ 是平稳过程, 并求其自谱密度

解:

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[X(t)] + E[Y(t)] = m_X + m_Y \\ R_Z(t, t + \tau) &= E[Z(t)Z(t + \tau)] \\ &= E\{[X(t) + Y(t)][X(t + \tau) + Y(t + \tau)]\} \\ &= E[X(t)X(t + \tau)] + E[Y(t)Y(t + \tau)] \\ &\quad + E[X(t)Y(t + \tau)] + E[Y(t)X(t + \tau)] \\ &= R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) \end{aligned}$$

均值和自相关函数均与 t 无关, 所以是平稳过程

计算自谱密度

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$

在等式两边取傅里叶变换，得

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega)$$

$$= S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + \overline{S_{XY}(\omega)}$$

$$= S_X(\omega) + S_Y(\omega) + 2\operatorname{Re}[S_{XY}(\omega)]$$

第四节 各态历经性

介绍从一次试验所获得的一个样本函数来决定随机过程的均值和自相关函数，从而就可以得到该过程的全部信息，即遍历性问题

4.1 基本概念

定义1 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为随机过程，

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

称 $\langle X(t) \rangle$ 为沿整个时间数轴上的时间均值；

$$\langle X(t+\tau)X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t+\tau)X(t) dt$$

称 $\langle X(t+\tau)X(t) \rangle$ 为沿整个时间数轴上的时间相关函数

定义2 设 $X(t)$ 是一个均方连续平稳过程,

若 $\langle X(t) \rangle = E[X(t)] = m_X$

则称 $X(t)$ 的均值具有遍历性;

若 $\langle X(t+\tau)X(t) \rangle = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau)$

则称 $X(t)$ 的自相关函数具有遍历性

如果 $X(t)$ 均值、相关函数都具有遍历性

则称 $X(t)$ 具有遍历性, 或者说 $X(t)$ 是遍历的

例

试讨论 $X(t) = a \cos(\omega t + U)$, $-\infty < t < +\infty$

是否具有遍历性. 其中 a , ω 是常数,

U 是在 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀随机变量

解

$$E[X(t)] = E[a \cos(\omega t + U)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + x) \frac{1}{2\pi} dx = 0$$

$$\begin{aligned} E[X(t+\tau)X(t)] &= \int_0^{2\pi} a^2 \cos[\omega(t+\tau) + x] \cos(\omega t + x) \frac{1}{2\pi} dx \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau \end{aligned}$$

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cos(\omega t + U) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{a \cos U \sin \omega T}{\omega T} = 0$$

$$\langle X(t + \tau) X(t) \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \cos[\omega(t + \tau) + U] \cos(\omega t + U) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau \quad \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \omega \tau + 2U) + \cos(\omega \tau)]$$

故有

$$\langle X(t) \rangle = E[X(t)]$$

$$\langle X(t + \tau) X(t) \rangle = E[X(t + \tau) X(t)]$$

即此过程是遍历的

例

研究随机过程 $X(t) = Y \quad -\infty < t < +\infty$
的遍历性

其中 Y 为随机变量, 且 $D(Y) \neq 0 \quad D(Y) < +\infty$

解

因为 Y 为随机变量, 且存在有限的二阶矩,

所以 $E[X(t)] = E(Y) = \text{常数}$

$$E[X(t+\tau)X(t)] = E[Y^2] = D(Y) + [E(Y)]^2 < +\infty$$

由此知 $X(t)$ 是平稳过程

由于

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y dt = Y$$

不是常数

故

$$\langle X(t) \rangle \neq E[X(t)]$$

即 $X(t)$ 不是遍历的

注

遍历性随机过程一定是平稳过程，但平稳过程不一定具备遍历性

4.2 遍历性定理

定理1

均值遍历性定理

设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是均方连续平稳过程，
则 $X(t)$ 有均值遍历性的充要条件为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau = 0$$

其中 $E[X(t)] = m$ ， $B(\tau)$ 是相关函数， $\tau = t_1 - t_2$

引理

设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为均方连续平稳过程,

$$\text{且 } E[X(t)] = m \quad Y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

则

$$E[Y] = E[X(t)] = m$$

$$D(Y) = \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

证

由均方可积条件得

$$E(Y) = \frac{1}{2T} E\left[\int_{-T}^T X(t) dt\right] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)] dt = m$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{4T^2} E\left[\int_{-T}^T X(t_1) dt_1 \cdot \int_{-T}^T X(t_2) dt_2\right]$$

$$= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1)X(t_2)] dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T B(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

所以

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T B(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 - m^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T [B(t_1 - t_2) - m^2] dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1 - t_2) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

为应用方便，化简上式

令

$$u = t_1 - t_2 \quad v = t_1 + t_2$$

则

$$\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2}$$

于是

$$D(Y) = \frac{1}{8T^2} \left\{ \int_{-2T}^0 [C(u) \int_{-2T-u}^{2T+u} dv] du + \int_0^{2T} [C(u) \int_{-2T+u}^{2T-u} dv] du \right\}$$

$$= \frac{1}{2T} \left[\int_{-2T}^0 \left(1 + \frac{u}{2T}\right) (B(u) - m^2) du + \int_0^{2T} \left(1 - \frac{u}{2T}\right) (B(u) - m^2) du \right]$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau$$

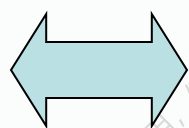
定理证

由引理得

$$\begin{aligned} D(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= E\left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt - E[X(t)] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau \end{aligned}$$

从而

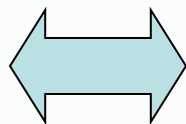
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E\left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt - E[X(t)] \right\}^2 = 0$$



$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau = 0$$

故

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = E[X(t)]$$



$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau = 0$$

注

若 $0 \leq t < +\infty$ 则

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau = 0$$

可表示为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) (B(\tau) - m^2) d\tau = 0$$

定理2

自相关函数遍历性定理

设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是均方连续平稳过程,

$$Z = X(t + \lambda)X(t)$$

则相关函数 $B_z(\tau)$ 具有遍历性的充要条件为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) (B_z(\tau) - m_z^2) d\tau = 0$$

其中 $B_Z(\tau) = E[X(t + \lambda + \tau)X(t + \tau) \cdot X(t + \lambda)X(t)]$

$$m_Z = E[X(t + \lambda)X(t)]$$

证 将定理 1 中的 $X(t)$ 换成 $X(t + \lambda)X(t)$ 即可证明

注 若 $0 \leq t < +\infty$ 则

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) (B_Z(\tau) - m_Z^2) d\tau = 0$$

随机过程小结

1、随机过程 $X(t, \omega)$ 是关于 $t \in T, \omega \in \Omega$ 的二元映射，
即： $X(\cdot, \cdot): T \times \Omega \mapsto R$.

2、 $X(t)$ 的一维分布函数： $F_t(x) = P\{X(t) \leq x\}$,

$X(t)$ 的二维分布函数： $F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$

会计算随机过程 $X(t)$ 一维、二维的分布函数

3、随机过程 $X(t)$ 的均值函数、方差函数、自相关函数、自协方差函数的计算与相互关系

$$m(t) = E[X(t)]$$

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$D(t) = E[X(t) - m(t)]$$

$$R(t, t) = D(t) + m^2(t)$$

$$= E[X^2(t)] - m^2(t)$$

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))]$$

$$= R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$$

$$D(t) = C(t, t)$$

4、两个随机过程 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的互相关函数、互协方差函数的计算与相互关系

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$$

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))]$$

$$= R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

若对任意的 t_1, t_2 , $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$, 则 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关.

此时, $R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1)m_Y(t_2)$

5、几个重要的随机过程

二阶矩过程：对于每一个 $t \in T$,二阶矩 $E[X^2(t)]$ 都存在

正态过程：对任意正整数 $n \geq 1$, 和 n 个不同的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,
 $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\} \sim N_n(\mu, \Sigma)$

正交增量过程：若随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为二阶矩过程，
且对任意的 $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, 恒有 $E[(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))] = 0$

独立增量过程： 对 n 个不同的 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$,
 $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立

平稳独立增量过程：独立增量过程 $X(t)$ 的任意增量 $X(s+t) - X(s)$ ($s \geq 0, t > 0$) 的概率分布与 s 无关

泊松过程

令 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程, 若它满足条件

- (1) $N(0)=0$;
- (2) 是独立增量过程;
- (3) 对任意的 $s \geq 0, t \geq 0$,

$$P\{N(t+s) - N(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

性质: $N(t) = N(t) - N(0) \sim P(\lambda t)$,

$$E[N(t)] = \lambda t \quad D[N(t)] = \lambda t \quad C(s, t) = \lambda \min\{s, t\}$$

布朗运动的定义

定义：设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为随机过程，若它满足

- (1) $W(0)=0$;
- (2) 是独立增量过程;
- (3) 增量 $W(t) - W(s) \sim N(0, |t-s|\sigma^2)$, $\sigma > 0$;

则称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为布朗运动

性质： (1) $\{W(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程;

(2) 对每个 $t > 0$, $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, 且 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为正态过程

(3) $m_w(t)=0$, $C_w(s, t)=R_w(s, t)=\sigma^2 \min(s, t) (s, t \geq 0)$

6、严平稳和宽平稳过程，会验证一个随机过程是不是宽平稳过程

$X(t)$ 为宽平稳过程满足条件：

(1) $E[X(t)] = m$, m 为常数；

(2) 对任意的 $t \in T$, $\tau \in T$, $E[X(t)X(t + \tau)]$ 不依赖于 t ;

7、遍历性定理；会验证 $X(t)$ 是否具有遍历性

$$\langle X(t) \rangle = E[X(t)] = m_X \text{ (a.s.)}$$

$$\langle X(t + \tau)X(t) \rangle = E[X(t + \tau)X(t)] = R_X(\tau) \text{ (a.s.)}$$

8. 谱密度和相关函数之间的关系（计算谱密度）

平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E \left\{ |F_X(\omega, T)|^2 \right\}$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

谱密度是非负、实的、偶函数

平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E \{ F_X(-\omega, T) F_Y(\omega, T) \}$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$